1 問題

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$ を計算せよ.

2 解答

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$ とおく.

(i) $a = 1$ のとき.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

(ii) $a \neq 1$ のとき.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} \\ &= 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \cdots + na^{n-1} \\ &= \left.\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\ & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\ & & & + & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\ & & & & & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\ & & & & & & & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\ & & & & & & & & & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\ & & & & & & & & & & & & & + & \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & & & & + & a^{n-1} \end{array}\right\} n \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=r}^{n} a^{k-1}\right) \\ &= \sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{a^{r-1}(1-a^{n-r+1})}{1-a}\right\} \\ &= \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{a^{r-1}}{1-a} + \frac{a^n}{1-a}\right) \\ &= \frac{1-a^n}{(1-a)^2} - \frac{na^n}{1-a}. \end{aligned}$$

3　解説

$$
\left.
\begin{array}{rccccccccccccccccc}
S_n = & 1 & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\
 & & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\
 & & & & + & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\
 & & & & & & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\
 & & & & & & & & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\
 & & & & & & & & & & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} \\
 & & & & & & & & & & & & & & + & \\
 & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & & & & + & a^{n-1}
\end{array}
\right\} n
$$

の形で書けば, この式の各行に注目して

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} \\
 & & a & + & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a^{k-1} \\
 & & & & a^2 & + & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=3}^{n} a^{k-1} \\
 & & & & & & a^3 & + & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=4}^{n} a^{k-1} \\
 & & & & & & & & a^4 & + & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=5}^{n} a^{k-1} \\
 & & & & & & & & & & a^5 & + & \cdots & + & a^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=6}^{n} a^{k-1} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & & & & a^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=n}^{n} a^{k-1}
\end{array}
$$

となっていることが分かり, さらに各式の k の初期値に注目して

$$
S_n = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} a^{k-1} \right)
$$

と書ける. このとき内側の総和は単なる等比数列の和なので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{n} a^{k-1} &= a^{r-1} + a^r + a^{r+1} + \cdots + a^{n-1} = a^{r-1}\left(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-r}\right) = \frac{a^{r-1}(1-a^{n-r+1})}{1-a} \\
&= \frac{a^{r-1}}{1-a} + \frac{a^n}{1-a}
\end{aligned}
$$

となる. あとはこれの r に関する和を求めればよい.

4　補遺

S_n とおいて $(1-a)S_n$ を求めるというのが高校生的やり方らしい．そういえばそんなのを習ったような．もちろん忘れてたけど．そして高校生は思うに違いない．「$(1-a)$ を掛けるなんて思いつくわけないだろ」と．

思いつかないなら，そのまま解けばいいじゃない．

なんだ，$(1-a)$ なんて掛けなくても普通に解けるじゃないか．たしかに $(1-a)$ を掛けるのはエレガントだけど，そんないつも使えるわけではないパターンを教えても混乱するだけでしょ．漢(おとこ)なら力技．

そして，高校生はまた思うだろう．「力技で求めたりしたらちゃんと合ってるかどうか確かめるのが大変じゃないか」と．

大変だったら，計算機(コンピュータ)にやらせればいいじゃない．

```
let rec exp n x = match n with
    0 -> 1
  | _ ->
    let x' = exp (n/2) x in
      if n mod 2 == 0 then x' * x'
                      else x' * x' * x;;

let rec s1 a = function
    1 -> 1
  | n -> n * (exp (n-1) a) + s1 a (n-1);;

let s2 a n =
  let e = exp n a in
    ((1-e)/(1-a) - n*e) / (1-a);;

let rec check a = function
    0 -> true
  | n -> ((s1 a n) == (s2 a n)) && check a (n-1);;

let pp b = print_endline (string_of_bool b);;

pp (check 2 10);;
pp (check 3 10);;
pp (check 4 10);;
pp (check 5 10);;
```

やっぱこういう数学っぽいものは ML で書くと一瞬だな．非常に分かりやすい．

絶望した!
パンがなければケーキを食べるという発想ができない高校生に絶望した!

5　文責等