ルートの無限入れ子クイズ — 大学生的解答

written by coffee-vanana

2007-06-13

1 元ネタ

結城浩の日記 — ルートの無限入れ子クイズ

2 問題

数列 $\langle a_n \rangle$ が,

$$a_1 = \sqrt{2},\quad a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}},\quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\quad a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\quad \cdots$$

で与えられているとき, 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

3 大学生的解答

とくに意味もなく一般化しておく. 数列 $\langle a_n \rangle$ が 1 より大きな定数 $a, k \in \mathbb{R}$ について

$$a_1 = a^{\frac{1}{k}},\quad a_2 = \left(a \cdot a^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{k}},\quad a_3 = \left(a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{k}},\quad a_4 = \left(a \cdot \left(a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{k}},\quad \cdots$$

で与えられるときの極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求める.

3.1 数列の一般項

漸化式で表すと

$$a_{n+1} = (a \cdot a_n)^{\frac{1}{k}}$$

となる. これよりただちに

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (a \cdot a_n)^{\frac{1}{k}} \\
&= a^{\frac{1}{k}} \cdot a_n^{\frac{1}{k}} \qquad (\because \text{指数法則}) \\
&= a^{\frac{1}{k}} \cdot a^{\frac{1}{k^2}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{k^{n+1}}} \qquad (\because a_1\text{から帰納的に}) \\
&= a_n \cdot a^{\frac{1}{k^{n+1}}}
\end{aligned}$$

が導ける.

3.2　収束性

$\langle a_n \rangle$ が Cauchy 列であることを示す.

任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して実数 $n_0 = -\log_k\left(\log_a\left(\varepsilon a^{\frac{-1}{k-1}} + 1\right)\right)$ が存在する. このとき $n \geq n_0$ なる任意の n について $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ が成り立つことを示す.

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - a_n| &= \left| a^{\frac{1}{k}} \cdot a^{\frac{1}{k^2}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{k^n}} \cdot \left(a^{\frac{1}{k^{n+1}}} - 1 \right) \right| \\
&= a^{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \cdots + \frac{1}{k^n}} \cdot \left(a^{\frac{1}{k^{n+1}}} - 1 \right) \qquad (\because a^{\frac{1}{k^{n+1}}} - 1 \geq 0, \text{指数法則}) \\
&= a^{\frac{1-\frac{1}{k^n}}{k-1}} \cdot \left(a^{\frac{1}{k^{n+1}}} - 1 \right) \qquad (\because \text{等比数列の和}).
\end{aligned}
$$

ここで $n \geq n_0$ より

$$
\begin{aligned}
& n + 1 > -\log_k\left(\log_a\left(\varepsilon a^{\frac{-1}{k-1}} + 1\right)\right) \\
\Leftrightarrow\ & k^{n+1} > \left(\log_a\left(\varepsilon a^{\frac{-1}{k-1}} + 1\right)\right)^{-1} \qquad (\because 1 < k) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{k^{n+1}} < \log_a\left(\varepsilon a^{\frac{-1}{k-1}} + 1\right) \\
\Leftrightarrow\ & a^{\frac{1}{k^{n+1}}} < \varepsilon a^{\frac{-1}{k-1}} + 1 \qquad (\because 1 < a) \\
\Leftrightarrow\ & a^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(a^{\frac{1}{k^{n+1}}} - 1 \right) < \varepsilon \\
\Rightarrow\ & a^{\frac{1-\frac{1}{k^n}}{k-1}} \cdot \left(a^{\frac{1}{k^{n+1}}} - 1 \right) < \varepsilon \qquad (\because a^{\frac{1-\frac{1}{k^n}}{k-1}} \leq a^{\frac{1}{k-1}}) \\
\Leftrightarrow\ & |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

以上より $\langle a_n \rangle$ は Cauchy 列なので $n \to \infty$ で収束する.

3.3　極限

$\langle a_n \rangle$ は収束するのでその極限を x とおく. すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = x.$$

$\langle a_n \rangle$ は Cauchy 列であるから

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \left((a \cdot a_n)^{\frac{1}{k}} - a_n \right) = 0.$$

従って

$$\lim_{n\to\infty} \left((a \cdot a_n)^{\frac{1}{k}} - a_n \right) = (a \cdot x)^{\frac{1}{k}} - x = 0.$$

変形して

$$x^k - ax = x(x^{k-1} - a) = 0.$$

任意の n について $a_n > 0$ なので $x > 0$. ゆえに

$$x = a^{\frac{1}{k-1}}.$$

問題は $a = 2$, $k = 2$ の場合なので, 収束値は 2.

4　与太話

高校数学的には

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n| &= \lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1-\frac{1}{k^n}}{k-1}}\cdot\left(a^{\frac{1}{k^{n+1}}}-1\right)\right)\\ &= a^{\frac{1-0}{k-1}}\cdot\left(a^0-1\right)\\ &= a^{\frac{1}{k-1}}\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

で収束性が言える.

でもその前に高校数学的には, 一般項 $a_n=a^{\frac{1-\frac{1}{k^n}}{k-1}}$ の極限は簡単に求められて

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1-\frac{1}{k^n}}{k-1}}=a^{\frac{1-0}{k-1}}=a^{\frac{1}{k-1}}$$

となるので, 収束性を示すまでもない.

高校数学でなくても,

$$a_n=a^{\frac{1-\frac{1}{k^n}}{k-1}}=a^{\frac{1}{k-1}}\cdot a^{\frac{-1}{(k-1)k^n}}$$

と書けるので, $a^{\frac{1}{(k-1)k^n}}$ が単調減少で 1 に収束すること (ほぼ自明) を言えば収束性と極限が同時に言える.

ただ, 収束性を仮定すれば極限が即座に求まることも解答中に現れている方がより題意に沿っているし, 個人的には収束性を先に言う証明の方が原理に忠実だと思うので解答ではこの形をとらなかった.

結果的に証明中に両方の解き方の方針が現れている (「$a^{\frac{1}{(k-1)k^n}}$ が単調減少で 1 に収束する」は収束性の証明の「$a^{\frac{1-\frac{1}{k^n}}{k-1}}\leq a^{\frac{1}{k-1}}$」として現れている) ので, これはこれで本質をついている気もする.