方程式再考

伊奈 林太郎

京都大学 大学院情報学研究科
ina@kuis.kyoto-u.ac.jp

概 要 方程式の解法は, 存在性の証明と一意性の証明という 2 つの流れに分解できる. この二面性に対する意識を疎かにすると容易に誤った解を導き出してしまうことになる. 本稿では, 方程式の誤った解法の例を提示して, 方程式の解についての厳密な考察を通してこの誤りが二面性の無理解によるものであることを明らかにする.

1 はじめに

方程式の解法は, 中学・高校でルーチンワークになるまで繰り返し学習させられる. しかし, このような方法で身につくある種の解法には, 方程式の本質を見落とし誤った結論を導き出してしまう危うさがある.

これは, 方程式の解法のうちに, 解と思われるある候補が実際に解になっているかどうか確かめること (存在性) と, その候補がすべての可能な解を網羅しているかどうかを確かめること (一意性), という 2 つの流れが含まれているためと考えられる. 厄介なことに, 方程式の解法の習得のために習う多くの代数方程式の問題において, 「解と思われる候補」をまず見つけてくる作業は, 後者の「すべての可能な解を網羅しているかどうかを確かめる」ことに相当する. それゆえ両者の流れを混同するのは容易い.

本稿では, 第 2節で方程式を解く問題の例および誤った解法の例を提示し, それが誤っていることを問題形式で指摘する. 第 3節では, この問題形式への解答として, 第 2節で提示された誤りを端的に指摘し, 本来あるべき正しい解法を与える. 第 4節では方程式と解そのものについて考察し, 第 2節の解法の例の誤りの本質が存在性と一意性の混同にあるということを述べる.

Reconsidering Equations.
INA Lintaro, Graduate School of Informatics, Kyoto University, 2008-06-29.

2 問題

以下の文章を読み, 設問[A], [B], [C], [D]に答えよ.

文章

問題 (1-a) 方程式 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ を解け.

解答 (1-b) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ より, $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = x^2 = 2$. ゆえに方程式の解は $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ である.

問題 (2-a) 方程式 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$ を解け.

解答 (2-b) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$ より, $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = x^4 = 4$. ゆえに方程式の解は $x = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$ である.

(出典: 『特に言いたいことは無い』[1] 改)

[A] (1-b)の解答の誤りを指摘せよ.

[B] $x = \sqrt{2}$ のとき, $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ であることを証明せよ.

[C] (2-b)の解答の誤りを指摘せよ.

[D] (1-a), (2-a)の方程式の正しい解はそれぞれ何か.

3 解答

解答 [A] $x = \sqrt{2}$ が実際に $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ を満たすことが示されていない.

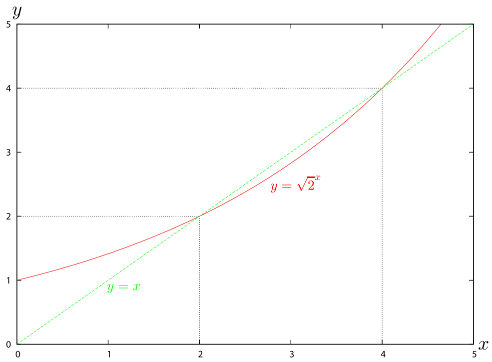

図 1. $y=\sqrt{2}^x$ と $y=x$ のグラフ

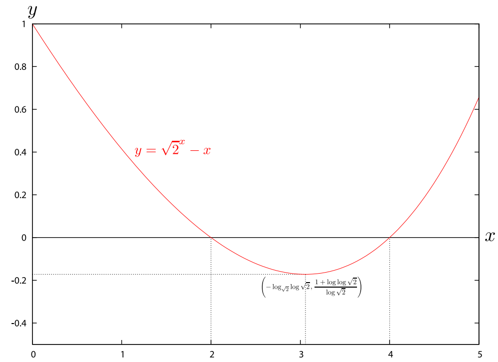

図 2. $y=\sqrt{2}^x-x$ のグラフ

解答 [B] 証明. 漸化式

$$\begin{cases} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_{n+1} &= \sqrt{2}^{a_n} \end{cases}$$

で定義される数列 $\langle a_n\rangle$ を考えると, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \lim_{n\to\infty} a_n$ なので, 数列 $\langle a_n\rangle$ が $n\to\infty$ で 2 に収束することを示せばよい.

(上界) 数列 $\langle a_n\rangle$ が 2 を上界とすること, すなわち, $\forall n\in\mathbb{N}^+.\, a_n\leq 2$ を示す.

(i) $n=1$ のとき, $a_1=\sqrt{2}\leq 2$ より成立.

(ii) $a_k\leq 2$ と仮定すると, $\sqrt{2}^2=2$ および $\sqrt{2}^x$ の単調性から, $a_{k+1}=\sqrt{2}^{a_k}\leq\sqrt{2}^2=2$ である. 従って $n=k+1$ のときも成立.

ゆえに, 数学的帰納法により $\forall n\in\mathbb{N}^+.\, a_n\leq 2$ である.

(存在性) 数列 $\langle a_n\rangle$ が収束することを示す. $\sqrt{2}>1$ より, 数列 $\langle a_n\rangle$ は単調増加である. また, 前述の議論により, 数列 $\langle a_n\rangle$ は上界を持つ. 従って, 単調増加で上に有界なので, 定理 A.2より, 数列 $\langle a_n\rangle$ は収束する.

(一意性) 数列 $\langle a_n\rangle$ が α に収束すると仮定する. $\alpha=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}^{a_{n-1}}=\sqrt{2}^\alpha$ より, α は $\sqrt{2}^\alpha=\alpha$ を満たす. これを満たす α の値は, 曲線 $y=\sqrt{2}^x$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標, あるいは関数 $f(x)=\sqrt{2}^x-x$ としたときの曲線 $y=f(x)$ の x 軸との交点の x 座標の値である. $f(2)=0$, $f(4)=0$ なので, 関数 $f(x)$ は $x=2,4$ で x 軸と交わる. $f(x)$ の導関数 $f'(x)=\sqrt{2}^x\log\sqrt{2}-1$ は, $f'(2)=\log 2-1<0$, $f'(4)=\log 4-1>0$ で, $x=-\log_{\sqrt{2}}\log\sqrt{2}$ のみで極小になることから, $y=f(x)$ は下に凸の曲線で, x 軸との交点は 2 点である. ゆえに $f(x)=0$ は $x=2,4$ 以外に解を持たない. 上界の議論より $a_n\leq 2$ なので, $\alpha\neq 4$ である. 従って, 数列 $\langle a_n\rangle$ が α に収束するならば, $\alpha=2$ である.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$-\log_{\sqrt{2}}\log\sqrt{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$			0	$+$		
$f(x)$	↘	0	↘	極小	↗	0	↗

表 1. $f(x)=\sqrt{2}^x-x$ の増減表

存在性と一意性より, 数列 $\langle a_n\rangle$ は $n\to\infty$ で 2 に収束する. □

解答 [C] $x=\sqrt{2}$ が実際に $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4$ を満たすことが示されていない.

解答 [D]

(1-a)

(存在性) [B]の解答より, $x=\sqrt{2}$ は $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ の解になっている.

(一意性) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ の解が $x=\alpha$ だと仮定すると, $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ より, $\alpha^2=2$. $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ の収束性から明らかに $\alpha\geq 0$ なので, $\alpha=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

ゆえに, $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ の解 $x=\alpha$ がもし存在するならば, 必ず $\alpha=\sqrt{2}$ である.

以上より, $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ の解は $x=\sqrt{2}$ である.

(2-a) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$ の解 $x = \alpha$ が存在すると仮定する. $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$ より, $\alpha^4 = 4$. $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ の収束性から明らかに $\alpha \geq 0$ なので, $\alpha = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$. ゆえに, $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$ の解 $x = \alpha$ がもし存在するならば, 必ず $\alpha = \sqrt{2}$ である. しかし, [B]の解答より, $x = \sqrt{2}$ のとき $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ なので, $x = \sqrt{2}$ は $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$ の解ではない. 従って, $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$ の解 $x = \alpha$ が存在するとした仮定は誤りである. ゆえに, $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$ の解は存在しない.

4 考察

方程式の解と解法について十分厳密に定義した上で, 第 2節の文章中の解法(1-b), (2-b)の誤りの本質を考察する.

4.1 方程式と解

この節では, 方程式の解法に関する議論を円滑にするために, まず方程式と解について整理しておく.

方程式の定義の与え方にはいろいろな方法が考えられるが, そのうちの一つとしてここでは以下のような定義を用いる.

定義 4.1.1 (方程式)**.** 変数 x に関する方程式とは, 自由変数 x と同値関係を含む論理式 $P(x)$ のことである.

他にもっと一般的な形で定義を与えることも可能だが, この定義は高校までに学習する方程式をすべて含んだものであるという意味で, 十分に方程式の定義として受け入れられるべきものになっている.

ただし, 論理式の厳密な定義は与えない. 何らかの無矛盾な形式体系[1]上の論理式として記述可能で, その論理式が定義を満たしているのなら, その対象を (その形式体系上の) 方程式と呼ぶという立場を取る.

[1] 普通の数学では古典論理と, 議論したい対象のための公理系を用いる.

例 4.1.2. 以下の論理式は変数 x に関する方程式である.

1. $x = 0$.
2. $x + 2 = 3x$.
3. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
4. $x \in \mathbb{N}$ and $0 = 0$.
5. $x \in \mathbb{R}$ or $0 = 1$.
6. $\begin{cases} y + z = 3 \\ 3y + 4z = 10 \end{cases} \qquad x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$.
7. $x = 1$ and $x = 0$.

1, 2. はごく普通の方程式の例である. 3. は恒等式と呼ばれるものだが, 方程式の定義にも含まれる. 4, 5. は x が $=$ のどちらの辺にも含まれないが, これも方程式の定義を満たしている. 6. は連立方程式の扱いを示している. このときの x はベクトルと考えてもよいが, むしろ単純に y と z の組と考えた方が一般性がある. 7. のように同じ変数に対して複数の制約があってもよい.

方程式の定義を用いて方程式の解を以下のように定義する.

定義 4.1.3 (方程式の解)**.** 方程式 $P(x)$ の解とは, $P(x)$ が真となるような x への代入のことである.

x への代入は普通 $x = a$ や $x := a$ のような形で表現される. 複数の代入をまとめて $x = a, b, c$ としたり, $x = a$ $(a \in A)$ のように集合の各要素の代入がすべて解になるような場合に $x = A$ のように略記することも考えられる. ここでは代入の表記法に関してはとくに厳密な定義は与えない.

例 4.1.4. 以下の a. から f. はそれぞれ例 4.1.2の 1. から 6. の解である.

a. $x = 0$.
b. $x = 1$.
c. $x = 2$
d. $x = 3$.
e. $x = \log \pi$.
f. $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a, b, f. はごく普通の例である. c, d, e はそれぞれ 3, 4, 5. の解の一つを示している. 3, 4, 5. の解はそれぞれ無数にあるが, 「ある代入が解かどうか」と

いう議論において解の個数は関係ない. 7. には解がない.

ある代入が方程式の解であるかどうかは, 解法とは全く無関係に与えられることに注意する. 実際に式に代入した結果を調べて解であるかどうか確かめさえすれば, その解をどうやって思いついたかとは関係なく「これはこの方程式の解である」という主張は正しい. 極論すれば, 「なんとなくこれが解だと思った」「神が解をお告げになった」でもよい. 確かめさえすれば思いついた理由は問われない.

4.2 解と解法

この節では, 方程式の解法について考察する.

解法の直感的な意味 まず例を用いて方程式の解法の意味を考える. $x^2 - 7x + 12 = 0$ という方程式は,

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= 0 \\ (x-3)(x-4) &= 0 \\ x &= 3, 4 \end{aligned}$$

という流れで解かれる. このままでは式の羅列に過ぎず意味が分かりにくいので, 「ならば」を表す論理記号「⇒」を用いて意味を明示することを考える. ただし「$A \Leftrightarrow B$」は「$A \Rightarrow B$ かつ $A \Leftarrow B$」の略記とする.

まず少なくとも $x = 3, 4$ が方程式の解であることを言わなければ解法とは言えないので, 定義に当て嵌めて $x = 3, 4$ が解であるかどうか確かめる必要がある. つまり, まず「$x = 3, 4$ は方程式 $x^2 - 7x + 12 = 0$ の解である」ということを主張すべきである. この主張を裏付けるための手順を書き表すと

$$\begin{gathered} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \Uparrow \\ (x-3)(x-4) = 0 \\ \Uparrow \\ x = 3, 4 \end{gathered}$$

となる. これは元の解法の手順とは逆順になっており, $x = 3$ なら $(3-3)(3-4) = 0$ なので $3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 0$ であり, $x = 4$ なら $(4-3)(4-4) = 0$ なので $4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 0$ ということを意味する.

ただこれだけでは**少なくとも**$x = 3, 4$ が解であるということしか言えない. 普通「方程式を解け」と言われたらすべての解を求めなければならない. このためには $x = 3, 4$ が解のうちのすべてである, すなわち $x = 3, 4$ 以外に解は無いということを示さなければならない. これを示すためには, $x = 3, 4$ 以外の解があったと仮定すると矛盾することを示すのが一般的である. $x = a$ $(a \neq 3, a \neq 4)$ という解があったと仮定する. これは方程式の解なので当然 $a^2 - 7a + 12 = 0$ を満たす. ゆえに

$$\begin{gathered} a^2 - 7a + 12 = 0 \\ \Downarrow \\ (a-3)(a-4) = 0 \\ \Downarrow \\ a = 3, 4 \end{gathered}$$

となる. しかしこれは $a \neq 3, a \neq 4$ に矛盾する. この手順は冗長なので, まず $x^2 - 7x + 12 = 0$ が成り立つと仮定して,

$$\begin{gathered} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \Downarrow \\ (x-3)(x-4) = 0 \\ \Downarrow \\ x = 3, 4 \end{gathered}$$

という流れにより, x のとりうる値の範囲が 3 と 4 に制限されると考える方が見通しがよい. これはあくまで「解が存在すると仮定すると, 解の範囲が制限される」という意味であることに注意する. またこれは元の解法の手順と同じ順序になっている.

以上のことを組み合わせると, 結局, このような解法は

$$\begin{gathered} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \Updownarrow \\ (x-3)(x-4) = 0 \\ \Updownarrow \\ x = 3, 4 \end{gathered}$$

ということを表していること, これによってすべての解が求まっていることが分かる.

存在性と一意性 直感的な説明による解法の手順の2つの方向の流れをもう少し厳密に説明する. 方程式の解法の手順は, 存在性 (existence) の証明と一意性 (uniqueness) の証明に分解することができる.

定義 4.2.1 (存在性)**.** ある集合 A に含まれる値 a による代入 $x = a$ が方程式 $P(x)$ の解であること, すなわち $\exists A.\forall a.\, a \in A \Rightarrow P(a)$ を示すことを解の存在性の証明と言う.

定義 4.2.2 (一意性)**.** 方程式 $P(x)$ の解 $x = a$ が, ある集合 A によって $a \in A$ に制限されることを示すこと, すなわち $\exists A.\forall a.\, P(a) \Rightarrow a \in A$ を示すことを解の一意性の証明と言う.

たとえば前述の例では, $\{3, 4\}$ という集合が存在して, $x = 3$ および $x = 4$ という代入がそれぞれ $x^2 - 7x + 12 = 0$ という式を充足することを示すのが存在性の証明で, $x^2 - 7x + 12 = 0$ を満たすような代入 $x = a$ があったと仮定すれば, a は必ず集合 $\{3, 4\}$ に入っていることを示すのが一意性の証明である.

直感的にも, この存在性と一意性において集合 A として同じものをとることができれば, それが方程式の解全体であることが分かるが, より形式的に記述すると次のようになる.

定義 4.2.3 (方程式を解く)**.** 方程式 $P(x)$ を解くとは, 次の論理式が真になることを, 具体的な集合 A を与えて証明することである.

$$\exists A.\forall a.\, a \in A \Leftrightarrow P(a).$$

この時, $x = A$ を方程式 $P(x)$ のすべての解と言い, A が空集合になる場合をとくに解なしと言う.

方程式を解く問題の答案としてよくある式変形を羅列しただけのものは, 実は一意性の証明の流れに相当する. 多くの代数方程式は, 一意性の証明の流れによって導かれた値に対してそのまま存在性が証明できる. これは式変形がすべて $\Leftrightarrow$ の関係を保ちながら行なわれるためである. 逆に, 式変形の $\Leftrightarrow$ の関係を保つ注意を怠ると, 誤った解を導いてしまう可能性がある. 存在性と一意性について十分に意識的であれば, 式変形の結果が実際に解になっているかどうか確かめることを忘れないだろう.

問題への適用 第 2節の文章中の問題の解法の誤りを生じている箇所について, 前述の議論に基づいて考察する.

(1-b)の解答は

$$\begin{array}{c} x^{x^{x^{\cddots}}} = 2 \\ \Downarrow \\ x^2 = 2 \\ \Updownarrow \\ x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{array} \tag{1}$$

という流れになっている. (1) の逆向き, 存在性の証明を欠いていることが分かる. この存在性の証明は[B]の解答で見たようにそれほど容易ではなく, 自明とは言い難い. そのため存在性の証明への言及を欠いたものは誤答ということになる.

一方, (2-b)の解答に関しても

$$\begin{array}{c} x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4 \\ \Downarrow \\ x^4 = 4 \\ \Updownarrow \\ x = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} \end{array} \tag{2}$$

という議論自体は正しい. しかしこの場合, (1) の逆向きの存在性が実は示せるのとは違い, (2) の逆向きの存在性は示せない. というのも, $x = \sqrt{2}$ が解だと仮定すると矛盾するからである (第 3節の[D]の解答). これは存在性の証明を怠った場合に導いた結論自体が誤りとなる例になっている.

5 おわりに

本稿では, 方程式を解く問題の例とその誤った解法を提示し, その誤りの本質について考察した. 方程式の解法が存在性と一意性という 2 つの手順に分解

できることを示し, 誤った解法の例が一意性の証明しか行なっていないことを明らかにした.

方程式を解く上では, 何よりもまず解だと主張しているものが実際に解になっているかどうか確かめることが重要である. このために, 存在性と一意性に相当する 2 つの方向の流れを意識するとよい.

参考文献

1. meadow-meal. 特に言いたいことは無い — アンナチュラルで大変なものを見つけていきました。http://meadowmeal.exblog.jp/7202668/, 2008-06-12.
2. 杉浦光夫. 解析入門 I. 東京大学出版会, 1980.

A 付録

公理 A.1 (実数の連続性[2]) 実数 $\mathbb{R}$ の, 上に有界な任意の部分集合 $A \neq \emptyset$ に対して, A の上限 (最小上界)$s = \sup A$ が $\mathbb{R}$ の中に存在する.

定理 A.2 上に有界な単調増加実数列 $\langle a_n \rangle$ は収束する.

証明. 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{a_n | n \in \mathbb{N}^+\} \neq \emptyset$ は上に有界だから, 実数の連続性公理 A.1より上限 $s = \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}^+\} \in \mathbb{R}$ が存在する. 上限は上界でもあるから,

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^+ . \, a_n \leq s$

が成り立つ. 一方, 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して $s - \varepsilon < s$ なので, $s - \varepsilon$ は $\{a_n | n \in \mathbb{N}^+\}$ の上界ではない. 従ってある $n_0 \in \mathbb{N}^+$ が存在して, $s - \varepsilon < a_{n_0}$ となる. ゆえに単調増加性と (3) から

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon \in \mathbb{R} . \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \ s.t. \\ &\quad n \geq n_0 \Rightarrow s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s \end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = s$$

である. □

[2] これは Dedekind の公理や Bolzano-Weierstrass 定理などと同値 [2] であり, どれを公理として採用するかによって証明できる内容が変わるわけではないので, ここではこの公理を採用している.